Folgen
monoton steigend: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$
monoton fallend: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$
Supremum: kleinste obere Schranke
Infimum: größte untere Schranke
Konvergenz
ϵ - Kriterium: $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - a| \leq \epsilon$
Cauchy-Krit.: $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m > n > n_0 : |a_m - a_n| \leq \epsilon$
a_n konvergiert gegen x: $\lim\limits_{x \to \infty} a_n = x$
punktweise Konvergenz gegen $f(x)$
$\forall x \in D \forall \epsilon > 0 \; \exists \; n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$
gleichmäßige Konvergenz gegen $f(x)$
$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$
Teilfolge: $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
Nullfolge: Folge die gegen 0 konvergiert
Häufungspunkt: a HP, wenn eine Teilfolge einer Folge gegen a konvergiert (*best.* divergiert, falls $a = \pm\infty$)
In jedem ϵ-Kreis um a ∞ Folgenglieder $\rightarrow$ a ist HP
Satz von Bolzano-Weierstraß
Jede komplexe/reelle Folge hat ≥ 1 HP
Rechenregeln
konv. Folgen a_n und b_n, jedes $b_n \neq 0$
$\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n + \lim\limits_{n \to \infty} b_n$
$\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \cdot \lim\limits_{n \to \infty} b_n \qquad \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} a_n}{\lim_{n \to \infty} b_n}$
a_n **Nullfolge,** b_n **beschränkte Folge**: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \cdot b_n = 0$
Limes Superior: Größter Häufungspunkt, falls existent
Limes Inferior: Kleinster Häufungspunkt, falls existent
Vergleichskriterium
a_n, c_n konvergent, reell mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} c_n = b$
Wenn $a_n \leq b_n \leq c_n$, dann $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$

Taylor mit Entwicklungspunkt x_*
Anwendung: Approx. einer Funktion um einen Punkt x_*.
Lineare Approximation:
$$\underbrace{f(x) \approx f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*)}_{\text{Tangentengleichung}}$$
Allgemein:
$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_*)}{k!}(x - x_*)^k}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_*)^{n+1}}_{R_{n,x_*}(x)}$$
mit ξ zwischen x und x_*

Differenzierbarkeit
Summenregel: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
Produktregel: $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Bruch: $\left(\frac{f}{h}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel: $(f \circ g)'(x) = f'(y) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Differenzieren der Umkehrfunktion:
$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$
Mittelwertsatz: f stetig und auf (a, b) diffbar, dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
Regel von l'Hospital: $\lim\limits_{n \to x_*} f(x) = \lim\limits_{n \to x_*} g(x) = 0$ oder $\lim\limits_{n \to x_*} f(x) = \lim\limits_{n \to x_*} g(x) = \infty$, dann
$\lim\limits_{n \to x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{n \to x_*} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Reihen
Konvergenz
ϵ-Kriterium: $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 : |a - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k| \leq \epsilon$
Cauchy-Kriterium
$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m > n > n_0 : |\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k| < \epsilon$
Wurzelkriterium: $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}!$
$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \text{absolute Konvergenz} \\ > 1 & \Rightarrow \text{Divergenz} \end{cases}$$
Quotientenkriterium
$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \text{absolute Konvergenz} \\ > 1 & \Rightarrow \text{Divergenz} \end{cases}$$
Leibniz-Kriterium: $a_k \geq 0, a_k \geq a_{k+1}, \lim a_k = 0$
$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent!
Majoranten-Kriterium: $|a_k| \leq b_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent
$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent
Minoranten-Kriterium: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ reel, $a_k \geq b_k \geq 0$
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent
Potenzreihen: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$
Konvergenzradius: $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$
gerade Funktion: $f(x) = f(-x)$
ungerade Funktion: $f(x) = -f(-x)$
Cauchy-Produkt: a_k, b_k **absolut** konvergent
$\Rightarrow$ Produkt konvergent
$(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k) \cdot (\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$

Partielle Integration
$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
Substitutionsregel
$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy + c$
Anschl. Rücksubstitution: $y = g(x)$ (Merkhilfe: $\frac{dy}{dx} = g'(x)$)
Riemann-Integral
Obersumme: $\overline{S} = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$
Untersumme: $\underline{S} = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$
$\rightarrow$ Flächeninhalt A: $\quad \underline{S} \leq A \leq \overline{S}$
Def.: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{|Z| \to 0} \underline{S}(Z) = \lim\limits_{|Z| \to 0} \overline{S}(Z)$
Partialbruchzerlegung
1. Abspalten des ganzen Teils (Polynomdivision)
2. Nullstellen des Nenners bestimmen (auch komplex)
3. damit: $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}}{(x - x_i)^j} + \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{s_i} \frac{b_{ij}x + c_{ij}}{((x - z_i)(x - \overline{z}_i))^j}$
   mit: r_i/s_i Vielfachheit reeller/imaginärer Nullstelle
   k/l Anzahl reeller/imaginärer Nullstellen
4. Berechnen der Koeffizienten
   (Hauptnenner durchmulti., Koeffizientenvergleich)

Newton-Verfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
Fehler: $e_{n+1} = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)} e_n^2$

Analysis im $\mathbb{R}^n$

Folgen

Summennorm:$||\vec{x}||_1 = |x_1| + |x_2| + ...|x_n|$

Euklidische Norm:$||\vec{x}||_2 = (|x_1|^2 + ... + |x_n|^2)^{0.5}$

Maximumnorm:$||\vec{x}||_\infty = \max(|x_1|, ..., |x_n|)$

Stetigkeit

ϵ-δ-Kriterium: $f : D \to W; D \subseteq V$

$(V, ||\cdot||_V), (W, ||\cdot||_W)$ normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \in D : ||x - x_*||_V \leq \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_*)||_W \leq \epsilon$

Folgenkriterium: $\lim\limits_{n\to\infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x}_*)$ wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}_*$

Partielle Ableitung: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_*) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}_* - h\vec{e}_i) - f(\vec{x}_*)}{h}$

Gradient: $\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\vec{x}) \end{pmatrix}$

Hesse-Matrix: $Hf = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(\vec{x}) & \dots & \partial_n\partial_1 f(\vec{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1\partial_n f(\vec{x}) & \dots & \partial_n\partial_n f(\vec{x}) \end{pmatrix}$

Satz von Schwarz: $\partial_i\partial_j f(\vec{x}) = \partial_j\partial_i f(\vec{x})$

Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty & ,\alpha > 0 \\ 1 & ,\alpha = 0 \\ 0 & ,\alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^n = e^{\frac{1}{x}}$$

Wichtige Definitionen

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$\cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

$\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$

$\sin^2(x) + cos^2(x) = 1$

$e = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ $\qquad \frac{1}{e} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!}$ $\qquad e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

$\ln\frac{1}{x} = -\ln x$ $\qquad \ln x^y = y \cdot \ln x$

Wichtige Ableitungen und Integrale

f	f'
a^x	$a^x \cdot \ln a$
x^x	$x^x(1 + \ln x)$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot^{-1} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

f	$\int f \mathrm{d}x$
$\frac{f'}{f}$	$\ln\|f\|$
$\tan x$	$-\ln\|\cos x\|$
$\cos^2 ax$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$
$\ln x$	$x\ln x - x$
$\sin^2 ax$	$\frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$
$f'(x)f(x)$	$0.5[f(x)]^2$

$f(x) = -f(-x)$

$\Rightarrow \int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$

$f(x) = f(-x)$

$\Rightarrow \int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2 \cdot \int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$

Wichtige Reihen

Geometrische Reihe: $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & ,|q| < 1 \\ \infty & ,|q| \geq 1 \end{cases}$$

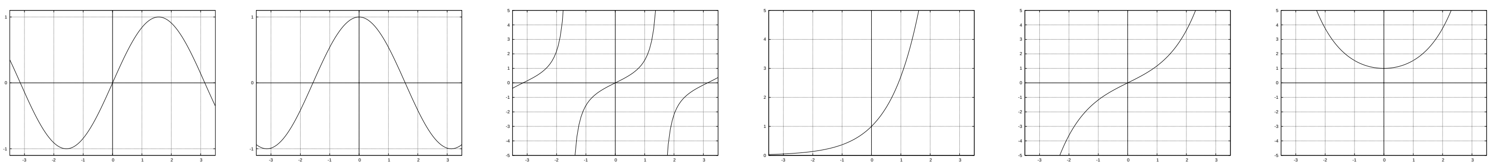
Harmonische Reihe: $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$\lim\limits_{n\to\infty} H_n = \infty$

Allg. harmonische Reihe: $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$

Divergiert für $\alpha \leq 1$, konvergiert für $\alpha > 1$

x	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0
cos(x)	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan(x)	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	pst	0	pst	0



(a) sin(x) (b) cos(x) (c) tan(x) (d) exp(x) (e) sinh(x) (f) cosh(x)