1 Aussagenlogik

1.1 Begriffe

Menge von Formeln Φ
Formel ψ,φ

Erfüllbarkeit *Beispiel:* $A \to \neg A$
$\exists \kappa : \kappa \models \Phi \leftrightarrow \Phi$ erfüllbar
Es gibt eine Wahrheitsbelegung die Φ erfüllt.

Unerfüllbarkeit *Beispiel:* $A \wedge \neg A$
$\forall \kappa : \kappa \not\models \Phi \leftrightarrow \Phi$ unerfüllbar
Es gibt keine Wahrheitsbelegung die Φ erfüllt.

Gültigkeit *Beispiel:* $A \vee \neg A$
$\emptyset \models \psi \leftrightarrow \forall \kappa : \kappa \models \psi$
Jede Wahrheitsbelegung erfüllt ψ. Auch **Tautologie** genannt.
Notation: $\models \psi$

logische Konsequenz *Beispiel:* $\{A \to B, A\} \models B$
ψ logische Konsequenz von Φ, wenn $\kappa \models \Phi$, dann auch $\kappa \models \psi$
Notation: $\Phi \models \psi$

logische Äquivalenz
ψ und φ logisch Äquivalent, wenn ihre Wahrheitstafeln über $At(\varphi) \cup At(\psi)$ identisch sind.
$\models \psi \leftrightarrow \varphi$
Die logische Äquivalenz ist also strenger als die logische Konsequenz und damit eine Teilmenge der letzteren.
Notation: $\psi \equiv \varphi$

Sammlung logischer Äquivalenzen

$$
\begin{array}{rcll}
\neg\neg\varphi & \equiv & \varphi & \\
\neg(\varphi \wedge \psi) & \equiv & \neg\varphi \vee \neg\psi & \text{(De-Morgan)} \\
\neg(\varphi \vee \psi) & \equiv & \neg\varphi \wedge \neg\psi & \text{(De-Morgan)} \\
\varphi \wedge (\psi \vee \chi) & \equiv & (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) & \text{(Distributiv)} \\
\varphi \vee (\psi \wedge \chi) & \equiv & (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) & \text{(Distributiv)} \\
(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi & \equiv & \varphi \wedge (\psi \wedge \chi) & \text{(Assoziativ)} \\
(\varphi \vee \psi) \vee \chi & \equiv & \varphi \vee (\psi \vee \chi) & \text{(Assoziativ)} \\
\chi \wedge \top & \equiv & \chi & \text{(neutr. Element)} \\
\chi \vee \bot & \equiv & \chi & \text{(neutr. Element)}
\end{array}
$$

1.2 Negationsnormalform NNF

Negationen kommen in einer NNF nur direkt vor Atomen vor, nicht vor Formeln.
ψ NNF von $\varphi \Leftrightarrow \varphi$ in NNF und $\psi \equiv \varphi$.

Berechnung:
$\text{NNF}(A) = A$
$\text{NNF}(\neg A) = \neg A$
$\text{NNF}(\neg\neg A) = A$
$\text{NNF}(\psi \wedge \varphi) = \text{NNF}(\psi) \wedge \text{NNF}(\varphi)$
$\text{NNF}(\psi \vee \varphi) = \text{NNF}(\psi) \vee \text{NNF}(\varphi)$
$\text{NNF}(\neg(\psi \wedge \varphi)) = \text{NNF}(\neg\psi) \vee \text{NNF}(\neg\varphi)$
$\text{NNF}(\neg(\psi \vee \varphi)) = \text{NNF}(\neg\psi) \wedge \text{NNF}(\neg\varphi)$

1.3 Konjunktive Normalform CNF

Konjunktion von Disjunktionen ('Verundung von Veroderungen').

Definition:

Literale	$L ::= A \mid \neg A$
Klauseln	$D ::= \bot \mid L \mid L \vee D$
CNFs	$C ::= \top \mid D \mid D \wedge C$

C CNF von $\varphi \Leftrightarrow C \equiv \varphi$ und C in CNF.
Berechnung, wenn φ in NNF:
$\text{CNF}(\varphi \wedge \psi) = \text{CNF}(\varphi) \wedge \text{CNF}(\psi)$
$\text{CNF}(L) = L$
$\text{CNF}(\varphi \vee \psi) = \bigwedge_k^{j=1} \bigwedge_n^{i=1} (D_i \vee E_j)$

1.4 Resolution (CNF)

$$\frac{D_1 \cup \{A\} \qquad D_2 \cup \{\neg A\}}{D_1 \cup D_2}$$

Anwendung:

1. Falls $\emptyset \in C$: *C nicht erfüllbar !*
2. Suche $D_1 \cup \{A\}, D_2 \cup \{\neg A\}, D_1 \cup D_2 \notin C$. Falls nicht vorhanden: *C erfüllbar !*
3. $C \leftarrow C \cup \{D_1 \cup D_2\}$, weiter bei Schritt 1

2 Prolog

2.1 Definitionen

Eine Klausel ist **definit**, wenn sie genau *ein* positives Literal enthält.
Man unterscheidet **Regeln** ($n > 0$) und **Fakten** ($n = 0$).
Ein **Programm** ist eine endliche Menge solcher definiten Klauseln.
Schreibweise: $\{A_0, \neg A_1, \neg A_2, ..., \neg A_n\} \equiv A_0 \leftarrow A_1, A_2, ..., A_n$

Eine Klausel ist eine **Zielklausel**, wenn sie *kein* positives Literal enthält.
Eine **Anfrage** ist eine solche Zielklausel.
Schreibweise: $\{\neg A_1, \neg A_2, ..., \neg A_n\} \equiv \leftarrow A_1, A_2, ..., A_n$

Man spricht in beiden Fällen von **Hornklauseln**.

Ein Atom heit **ground**, wenn es *keine Variablen* enthält.
Dies erreicht man durch simultanes Ersetzen aller X in D durch $\sigma(X)$. Die so entstehende Klausel $D\sigma$ nennt man **ground instance**.

2.2 Unifikation

Unter Unifikation versteht man das strukturelle gleichmachen zweier Terme.
Hierzu verwendet man das Konzept des **Substituierens**:
Eine Substitution σ ist eine Abbildung, die jeder Variable X einen Term $\sigma(X)$ zuordnet.
Hinweis: Man spricht bei der leeren Substitution [] von **Identität**.

Eine Substitution σ ist ein *Unifikator* von $E \doteq D$, wenn $E\sigma \equiv D\sigma$.
Ein Unifikator σ ist ein **most general unifyer** (mgu), wenn $\forall \sigma' \in \mathrm{Unif}(S) : \exists \tau : \sigma\tau = \sigma'$.

3 Logik 1. Stufe

Term E
$\varphi ::= E = D \mid P(E_1, ..., E_n) \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \forall X.\varphi$

$\forall X.\varphi$	'Für alle X gilt φ'
$\exists X.\varphi$	'Es existiert ein X, so dass φ'
$\exists X.\varphi \equiv \neg\forall X.\neg\varphi$	'Abbildung des Existenzquantors durch $\forall$'

3.1 Begriffe

Signatur Σ
Menge aller vorkommender Symbole.

Herbrand-Universum U_Σ
Menge aller Terme, die ohne Variablen gebildet werden können.
$U_\Sigma = \{E \mid E \text{ Term über } \Sigma, FV(E) = \emptyset\}$

Herbrand-Basis B_Σ
Menge aller Terme, die durch Anwendung aller Prädikate gebildet werden können.
$B_\Sigma = \{\varphi \mid \varphi \textit{ atomare} \text{ Formel über } \Sigma, FV(\Sigma) = \emptyset\}$

Beispiel:

$$P = \begin{cases} odd(s(0)) \\ odd(s(s(X))) \leftarrow odd(X) \end{cases}$$

$\Sigma = \{s, 0, odd\}$
$U_\Sigma = \{0, s(0), s(s(0))...\}$
$B_\Sigma = \{odd(0), odd(s(0)), odd(s(s(0)))...\}$

Definition Σ-Modell $\mathfrak{M}$

- Menge M ('Universum')
- Interpretation für n-stellige Funktionen $f/n \in \Sigma$ gegeben durch $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M}[\![f]\!]: M^n \rightarrow M$
- Belegungstupel $\mathfrak{M}[\![P]\!] \subseteq M^n$ für n-stellige Prädikate $P/n \in \Sigma$.

Eine Formel wird **Satz** genannt, wenn alle Variablen gebunden sind.
Seien $X_1, ..., X_n$ die freien Variablen von φ, so ist der **universelle Abschluss** von φ: $\forall X_1, ..., \forall X_n.\varphi$.
In Worten: 'Alle möglichen Variablen einsetzen'.

4 Fitch

4.1 Regeln

Not-Introduction

$$\frac{\begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg A}\ (\neg I)$$

Or-Introduction

$$\frac{A}{A \lor B}\ (\lor\ \mathrm{I1})$$

$$\frac{B}{A \lor B}\ (\lor\ \mathrm{I2})$$

And-Introduction

$$\frac{A \quad B}{A \land B}\ (\land \mathrm{I})$$

Not-Elim.

$$\frac{\neg\neg\ A}{A}\ (\neg\ \mathrm{E})$$

Or-Elim.

$$\frac{\begin{array}{|l|l} A & B \\ \hline \vdots & \vdots \\ C & C \end{array} \quad A \lor B}{C}\ (\lor \mathrm{E})$$

And-Elim.

$$\frac{A \land B}{A}\ (\land \mathrm{E1})$$

$$\frac{A \land B}{B}\ (\land \mathrm{E2})$$

Implication-Intro.

$$\frac{\begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}\ (\rightarrow \mathrm{I})$$

Exists-Introduction

$$\frac{\Phi[c/X]}{\exists\ x.\Phi}\ (\exists\ \mathrm{I})$$

Forall-Introduction

$$\frac{\begin{array}{|l} \boxed{C} \\ \hline \vdots \\ \Phi[c/X] \end{array}}{\forall\ X.\Phi}\ (\forall\ \mathrm{I})$$

Implication-Elim.

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}\ (\rightarrow \mathrm{E})$$

Exists-Elim.

$$\frac{\begin{array}{|l} \boxed{C} \quad \Phi[c/X] \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array}}{\psi}\ (\exists\ \mathrm{E})$$

Forall-Elim.

$$\frac{\forall\ x{:}\Phi}{\Phi[c/X]}\ (\forall\ \mathrm{E})$$

Bottom-Introduction

$$\frac{A \quad \neg\ A}{\bot}\ (\bot\ \mathrm{I})$$

Bottom-Elim.

$$\frac{\bot}{\text{beliebig}}\ (\bot\ \mathrm{E})$$

$$\frac{\neg\forall X\ p(X)}{\exists X\ \neg\ p(X)}$$

$$\frac{\neg\exists X\ p(X)}{\forall X\ \neg\ p(X)}$$

4.2 Strategien

1. **und**: $\lor$ I auf eine der beiden Aussagen anwenden.
2. **oder**: Beide Aussagen in einem Unterbeweis annehmen.
3. **Implikation**: Lokale Annahme der Voraussetzung.
4. **wenns garnicht weitergeht**: Gegenteil von zu Zeigendem annehmen und zum Widerspruch führen.

4.3 Beispiele

$\neg$A $\vee \neg$ B zu $\neg$ (A $\wedge$ B)

1	$\neg A \vee \neg B$		
2	$\neg A$	l.A.	
3	$A \wedge B$	l.A	
4	A	$\wedge$E	3
5	$\bot$	$\bot$I	2,4
6	$\neg (A \wedge B)$	$\neg$I	3-5
7	$\neg B$	l.A.	
8	$A \wedge B$	l.A.	
9	B	$\wedge$E	8
10	$\bot$	$\bot$I	7,9
11	$\neg (A \wedge B)$	$\neg$I	8-10
12	$\neg (A \wedge B)$	$\vee$E	1,6,11

$\neg$ (A $\wedge$ B) zu $\neg$A $\vee\neg$ B

1	$\neg (A \wedge B)$		
2	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	l.A.	
3	$\neg A$	l.A.	
4	$\neg A \vee \neg B$	$\vee$I	3
5	$\bot$	$\bot$I	2,4
6	$\neg\neg A$	$\neg$I	3-5
7	A	$\neg$E	6
8	$\neg B$	l.A.	
9	$\neg A \vee \neg B$	$\vee$I	7
10	$\bot$	$\bot$I	2,9
11	$\neg\neg B$	$\neg$I	8-10
12	B	$\neg$E	11
13	$A \wedge B$	$\wedge$I	7,12
14	$\bot$	$\bot$I	1,13
15	$\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$	$\neg$I	2-14
16	$\neg A \vee \neg B$	$\neg$E	15

1	$(A \to B) \wedge (B \to \neg A)$		
2	$A \to B$	$\wedge$E	1
3	$B \to \neg A$	$\wedge$E	1
4	A	l.A.	
5	B	$\to$E	2,4
6	$\neg A$	$\to$E	3,5
7	$\bot$	$\bot$I	4,6
8	$\neg A$	$\neg$I	4,7

1	$\neg A$		
2	A	l.A.	
3	$\bot$	$\bot$I	1,2
4	B	$\bot$E	3
5	$A \to B$	$\to$I	2-4
6	B	l.A.	
7	$\neg A$		1
8	$B \to \neg A$	$\to$I	6-7
9	$(A \to B) \wedge (B \to \neg A)$	$\wedge$I	5,8

A $\to$ B zu $\neg$A $\vee$ B

1	$A \to B$		
2	A	l.A.	
3	B	$\to$E	1,2
4	$\neg A \vee B$	$\vee$I	3
5	$\neg A$	l.A.	
6	$\neg A \vee B$	$\vee$I	5
7	$A \vee \neg A$		// Beweisen !
8	$\neg A \vee B$		

$\neg$A $\vee$ B zu A $\to$ B

1	$\neg A \vee B$		
2	$\neg A$	l.A.	
3	A	l.A.	
4	$\bot$	$\bot$I	2,3
5	B	$\bot$E	4
6	$A \to B$	$\to$I	3-5
7	B	l.A.	
8	A	l.A.	
9	B		7
10	$A \to B$	$\to$I	8-9
11	$A \to B$		

¬∀.p(X) zu ∃X.¬p(X)

1	¬∀X. p(X)		
2	¬∃X.¬p(X)	l.A.	
3	$\boxed{c}$	l.A.	
4	¬p(c)	l.A.	
5	∃ X.¬p(X)	∃I	4
6	⊥	⊥I	2,5
7	¬¬ p(c)	¬I	4-6
8	p(c)	¬E	7
9	∀X.p(X)	∀I	4-8
10	⊥	⊥I	1,9
11	¬¬∃X.¬p(X)	¬I	2-10
12	∃X.¬p(X)	¬E	11

∃X.¬p(X) zu ¬∀X.p(X)

1	∃X.¬p(X)		
2	$\boxed{c}$ ¬p(c)	l.A.	
3	∀X.p(X)	l.A.	
4	p(c)	∀E	3
5	⊥	⊥I	2,4
6	¬∀X.p(X)	¬I	3-5
7	¬∀X.p(X)	∃E	1,2-6

1	¬(A ∨¬ A)		
2	A	l.A.	
3	A ∨¬ A	∨I	2
4	⊥	⊥I	3
5	¬ A	¬I	2-4
6	A ∨¬ A	∨I	5
7	⊥	⊥I	1,6
8	¬¬(A∨¬A)	¬I	1-7
9	(A∨¬A)	¬E	8